Volume et caractéristique d'Euler d'hypersurfaces nodales aléatoires

Thomas Letendre (ÉNS de Lyon)

Lille – 13 octobre 2015

Géométrie aléatoire

(M, g) variété riemannienne, compacte, sans bord, de dimension n.
On choisit une hypersurface de M "au hasard".

Question

Que peut-on dire de sa géométrie (volume, courbure, ...) ou de sa topologie (nombre de composantes connexes, nombres de Betti, caractéristique d'Euler, ...) ?

On cherche une réponse statistique : moyenne, moments, loi, comportement presque sûr ...

Le cas des polynômes

Le cas des polynômes

Sur $\mathbb{C}$, un polynôme de degré d a d racines, génériquement simples.

Question

Combien un polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$ a-t-il de racines réelles ?

Le cas des polynômes

Sur $\mathbb{C}$, un polynôme de degré d a d racines, génériquement simples.

Question

Combien un polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$ a-t-il de racines réelles ?

Théorème (Kac, 1943)

Soit $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ avec a_i des v.a.i.i.d. gaussiennes centrées réduites, alors

$$\mathbb{E}\left[\operatorname{card}\left(P^{-1}(0)\right)\right] \sim \frac{2}{\pi}\ln(d).$$

Théorème (Kostlan, 1993)

Si on choisit les a_i de variance $\binom{d}{i}$, on a $\mathbb{E}\left[\operatorname{card}\left(P^{-1}(0)\right)\right] = \sqrt{d}$.

En dimension supérieure

P polynôme homogène de degré d en $n+1$ variables,
Z_P le lieu des zéros de P dans $\mathbb{RP}^n$.

Si P est distribué selon une loi de Kostlan, Z_P est presque surement une hypersurface lisse.

Théorème (Kostlan, 1993)

$$\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_P)] = \mathrm{Vol}\left(\mathbb{RP}^{n-1}\right)\sqrt{d}.$$

Théorème (Podkorytov, 2001)

Si n est impair,

$$\mathbb{E}[\chi(Z_P)] \sim (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)}{\pi\,\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})}\sqrt{d}^{\,n},$$

où χ est la caractéristique d'Euler.

La caractéristique d'Euler

Définition

Pour une variété M de dimension n,

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim\left(H_i(M, \mathbb{R})\right).$$

- $\chi(M)$ est un invariant topologique.
- Pour une variété fermée de dimension impaire $\chi(M) = 0$.
- Si M est triangulée :

$$\chi(M) = \text{nbre sommets} - \text{nbre arêtes} + \text{nbre faces} + \cdots$$

- Pour une surface fermée S connexe orientée : $\chi(S) = 2 - 2g$, où g est le genre géométrique.

Lois normales

$(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ euclidien de dimension N,
X v.a. à valeurs dans V,
Λ symétrique défini positif.

Définition

On dit que X suit une loi normale (ou gaussienne) centrée de variance Λ, si X admet la densité :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\sqrt{\det(\Lambda)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle \Lambda^{-1}x , x\right\rangle\right),$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $X \sim \mathcal{N}(\Lambda)$.

Si $\Lambda = \mathrm{Id}$, on dit que X est réduite.
Alors, dans une base orthonormée (e_i), $X = \sum a_i e_i$ où les a_i sont des v.a.i.i.d réelles de loi $\mathcal{N}(1)$.

Hypersurfaces nodales aléatoires

Espaces propres du laplacien

(M, g) variété riemannienne.
La mesure riemannienne $|\mathrm{d}V_M|$ définit un produit scalaire L^2 sur $\mathcal{C}^\infty(M)$:

$$\langle f_1\,, f_2\rangle = \int_M f_1 f_2 \,|\mathrm{d}V_M|\,.$$

On note $\Delta = d^* d$ l'opérateur de Laplace-Beltrami.

Faits classiques

- Le spectre de Δ est positif et discret : $0 = \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots$, et $\lambda_k \to +\infty$.
- Les espaces propres $\ker(\Delta - \lambda_k \,\mathrm{Id}) \subset \mathcal{C}^\infty(M)$ sont de dimension finie.
- $\bigoplus_{k\geqslant 0} \ker(\Delta - \lambda_k \,\mathrm{Id})$ est dense dans $L^2(M)$.

Espaces propres du laplacien

Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on note $Z_f = f^{-1}(0)$.

Théorème (Courant, 30's)

Si f est vecteur propre de Δ associé à la k-ième valeur propre, alors

$$b_0(Z_f) \leqslant k.$$

Conjecture (Yau, 1982)

Il existe deux constantes $0 < c_g < C_g$ telles que, si $f \in \ker(\Delta - \lambda \,\mathrm{Id})$,

$$c_g\sqrt{\lambda} \leqslant \mathrm{Vol}(Z_f) \leqslant C_g\sqrt{\lambda}.$$

Prouvé dans le cas analytique (Donnelly et Fefferman, 1988).

Espaces de fonctions propres

Pour $\lambda \geqslant 0$, on note

$$V_\lambda = \bigoplus_{\lambda_k \leqslant \lambda} \ker\left(\Delta - \lambda_k \,\mathrm{Id}\right).$$

C'est un espace euclidien pour le produit scalaire L^2, de dimension N_λ.

Théorème (asymptotique de Weyl, 1911)

$$N_\lambda \sim \frac{1}{(2\pi)^n} \mathrm{Vol}(\mathbb{B}^n)\,\mathrm{Vol}(M)\,\sqrt{\lambda}^n.$$

Définition

Si $f \in V_\lambda$, on dit que Z_f est une hypersurface nodale.

Hypersurfaces nodales aléatoires

Soit f un vecteur gaussien centré réduit dans V_λ.
On dit que Z_f est une hypersurface nodale aléatoire.

Hypersurfaces nodales aléatoires

Soit f un vecteur gaussien centré réduit dans V_λ.
On dit que Z_f est une hypersurface nodale aléatoire.

Lemme

Soient $f_1, \dots, f_r \in V_\lambda$ des v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mathrm{Id})$, alors $Z_{f_1} \cap \dots \cap Z_{f_r}$ est presque surement une sous-variété de codimension r de M.

Théorème (Bérard, 1985 – L., 2014)

Soient $f_1, \dots, f_r \in V_\lambda$ des v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mathrm{Id})$, on a

$$\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_{f_1} \cap \dots \cap Z_{f_r})] = \left(\frac{\lambda}{n+2}\right)^{\frac{r}{2}} \mathrm{Vol}(M) \frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-r})}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)} + O\left(\lambda^{\frac{r-1}{2}}\right).$$

Caractéristique d'Euler moyenne

Théorème (L., 2014)

Soient $f_1, \ldots, f_r \in V_\lambda$ des v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mathrm{Id})$, si $n-r$ est pair on a

$$\mathbb{E}[\chi(Z_{f_1} \cap \cdots \cap Z_{f_r})] = (-1)^{\frac{n-r}{2}} \left(\frac{\lambda}{n+2}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{Vol}(M) \frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-r+1}\right)\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{r-1}\right)}{\pi\,\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)\,\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})} + O\left(\lambda^{\frac{n-1}{2}}\right).$$

Pour $n-r$ impair, $\chi(Z_{f_1} \cap \cdots \cap Z_{f_r}) = 0$ presque surement.

Le cas du cercle

Sur $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ euclidien, $\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ et les fonctions propres satisfont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \lambda f = 0.$$

- Les valeurs propres sont les k^2 avec $k \in \mathbb{N}$.
- L'espace propre associé à k^2 est engendré par $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$.
- V_λ est l'espace des polynômes trigonométriques de degré $\leqslant \sqrt{\lambda}$.

Soit $f \sim \mathcal{N}(\mathrm{Id})$ dans V_λ,

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{\lambda} \rfloor} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx),$$

où les a_k et b_k sont des v.a.i.i.d. $\mathcal{N}(1)$.

Théorème (Bérard, 1985)

$$\mathbb{E}[\mathrm{card}(Z_f)] \sim \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\lambda}.$$

Idées de preuve

Variété d'incidence

$V \subset \mathcal{C}^\infty(M)$ sous-espace de dimension N.
$F : V \times M \to \mathbb{R}$, $F(f,x) = f(x)$ et $\Sigma = F^{-1}(0)$.

Lemme

Si V n'a pas de point base (pour tout x, il existe $f \in V$ tel que $f(x) \neq 0$) alors Σ est une hypersurface de $V \times M$.

Démonstration.

Pour tout (f,x), $\partial_1 F : h \mapsto h(x)$ est surjective, donc F submersion. □

Les points critiques de $\pi_1 : \Sigma \to V$ sont les (f,x) tels que $d_x f = 0$.
Ses valeurs critiques sont les f qui ne s'annulent pas transversalement.

Par Sard, Z_f est presque surement une hypersurface.

Le noyau de Schwartz

$\Pi : L^2(M) \to V$ projection orthogonale.

Lemme

Π est un opérateur à noyau, i.e. il existe un unique $e : M \times M \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\Pi(f)(x) = \langle e(x, \cdot)\,, f \rangle = \int_{y \in M} e(x, y) f(y)\, |\mathrm{d}V_M|$$

Démonstration.

Si $(f_1, \dots, f_N)$ est une base orthonormée de V, $e(x, y) = \sum f_i(x) f_i(y)$ convient. $\square$

Le noyau de Schwartz

$\Pi : L^2(M) \to V$ projection orthogonale.

Lemme

Π est un opérateur à noyau, i.e. il existe un unique $e : M \times M \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\Pi(f)(x) = \langle e(x, \cdot)\, , f \rangle = \int_{y \in M} e(x, y) f(y)\, |\mathrm{d}V_M|$$

Démonstration.

Si $(f_1, \ldots, f_N)$ est une base orthonormée de V, $e(x, y) = \sum f_i(x) f_i(y)$ convient. $\square$

Remarque

- e est lisse, et $e(x, \cdot) \in V$.
- x est point base si et seulement si $e(x, x) = \sum f_i(x)^2 = 0$.

La fonction de corrélation

Un vecteur gaussien centré réduit $f \in V$ définit un processus gaussien centré $(f(x))_{x \in M}$.

Fait

Si L est linéaire, alors $L(f)$ est encore un vecteur gaussien centré, et

$$\mathrm{Var}(L(f)) = LL^*.$$

Le processus $(f(x))$ est caractérisé par sa fonction de corrélation :

$$(x, y) \mapsto \mathbb{E}[f(x)f(y)] .$$

$\mathbb{E}[f(x)f(y)] = 0$ si et seulement si $f(x)$ et $f(y)$ sont indépendants.
$\mathbb{E}[f(x)f(y)] = \sqrt{\mathbb{E}[f(x)^2]\,\mathbb{E}[f(y)^2]}$ si et seulement si $f(x) = \alpha f(y)$ p.s.

La fonction de corrélation

Lemme

Pour tout x et $y \in M$, $\mathbb{E}[f(x)f(y)] = e(x,y)$.

Démonstration.

Dans une base orthonormée $(f_1, \ldots, f_N)$, on a $f = \sum a_i f_i$ où les a_i sont des normales centrées réduites indépendantes.

$$\mathbb{E}[f(x)f(y)] = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant N} \mathbb{E}[a_i a_j]\, f_i(x) f_j(y) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x) f_i(y) = e(x,y). \qquad \square$$

En dérivant sous l'intégrale :

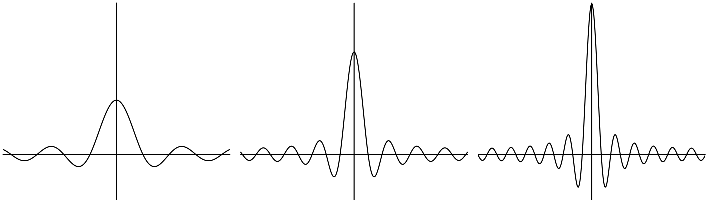
$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) f(y)\right] = \frac{\partial e}{\partial x_i}(x,y).$$

La fonction spectrale du laplacien

Pour $V_\lambda = \bigoplus_{\lambda_k \leqslant \lambda} \ker(\Delta - \lambda_k \,\mathrm{Id})$, le noyau e_λ est la fonction spectrale de Δ.

Sur le cercle euclidien $\mathbb{S}^1$, c'est le noyau de Dirichlet :

$$e_\lambda(x,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(\left(\lfloor\sqrt{\lambda}\rfloor + \frac{1}{2}\right)(x-y)\right)}{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}.$$



(a) $\lambda = 16$ (b) $\lambda = 64$ (c) $\lambda = 144$

Figure: Le noyau de Dirichlet

Comportement du noyau

Sur $\mathbb{S}^1$,

- $e_\lambda(x,y)$ ne dépend que de $d(x,y)$,
- $e_\lambda(x,x) \sim 2\sqrt{\lambda}$,
- échelle caractéristique : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

On a une limite d'échelle :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} e_\lambda \left(x, x + \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \right) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} \frac{\sin(h)}{\pi h}.$$

Sur M quelconque, on a le même genre de comportement : échelle caractéristique $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ et limite d'échelle (universelle).

Théorème (Hörmander, 1968)

$$e_\lambda(x,x) = C_n \lambda^{\frac{n}{2}} + O\left(\lambda^{\frac{n-1}{2}}\right).$$

Une heuristique

On découpe M en boîtes de taille $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$,
nombre de boîtes $\simeq \mathrm{Vol}(M)\,\lambda^{\frac{n}{2}}$.

Les boîtes sont indépendantes, et il se passe la même chose dans chaque : même proba d'avoir une composante de Z_f d'un type donné.

Une heuristique

On découpe M en boîtes de taille $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$,
nombre de boîtes $\simeq \mathrm{Vol}(M)\,\lambda^{\frac{n}{2}}$.

Les boîtes sont indépendantes, et il se passe la même chose dans chaque : même proba d'avoir une composante de Z_f d'un type donné.

Composantes de taille $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ donc volume de l'ordre de $\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{n-1}{2}}$.
Donc $\mathrm{Vol}(Z_f)$ proportionnel à $\mathrm{Vol}(M)\,\sqrt{\lambda}$.

Une heuristique

On découpe M en boîtes de taille $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$,
nombre de boîtes $\simeq \mathrm{Vol}(M)\,\lambda^{\frac{n}{2}}$.

Les boîtes sont indépendantes, et il se passe la même chose dans chaque :
même proba d'avoir une composante de Z_f d'un type donné.

Composantes de taille $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ donc volume de l'ordre de $\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{n-1}{2}}$.
Donc $\mathrm{Vol}(Z_f)$ proportionnel à $\mathrm{Vol}(M)\,\sqrt{\lambda}$.

De même, chaque boîte contribue une constante pour χ,
donc $\chi(Z_f)$ proportionnel à $\mathrm{Vol}(M)\,\lambda^{\frac{n}{2}}$.

La formule de Kac-Rice

$$\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_f)] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_V \left(\int_{Z_f} \exp\left(-\frac{\|f\|}{2} \right) |\mathrm{d}V_{Z_f}| \right) \mathrm{d}f$$

La formule de Kac-Rice

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_f)] &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_V \left(\int_{Z_f} \exp\left(-\frac{\|f\|}{2}\right) |\mathrm{d}V_{Z_f}| \right) \mathrm{d}f \\
&= \int_\Sigma \cdots \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_M \left(\int_{\{f \mid f(x)=0\}} \qquad\qquad \exp\left(-\frac{\|f\|}{2}\right) \mathrm{d}f \right) |\mathrm{d}V_M|
\end{aligned}$$

La formule de Kac-Rice

$$\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_f)] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_V \left(\int_{Z_f} \exp\left(-\frac{\|f\|}{2}\right) |\mathrm{d}V_{Z_f}| \right) \mathrm{d}f$$

$$= \int_\Sigma \cdots$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_M \left(\int_{\{f | f(x)=0\}} \frac{\|\nabla_x f\|}{\sqrt{e(x,x)}} \exp\left(-\frac{\|f\|}{2}\right) \mathrm{d}f \right) |\mathrm{d}V_M|$$

La formule de Kac-Rice

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_f)] &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_V \left(\int_{Z_f} \exp\left(-\frac{\|f\|}{2} \right) |\mathrm{d}V_{Z_f}| \right) \mathrm{d}f \\
&= \int_\Sigma \cdots \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_M \left(\int_{\{f \mid f(x)=0\}} \frac{\|\nabla_x f\|}{\sqrt{e(x,x)}} \exp\left(-\frac{\|f\|}{2} \right) \mathrm{d}f \right) |\mathrm{d}V_M| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_M \frac{1}{\sqrt{e(x,x)}} \mathbb{E}\left[\|\nabla_x f\| \;\middle|\; f(x) = 0 \right] |\mathrm{d}V_M|
\end{aligned}
$$

La preuve pour le volume

$$\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_f)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in M} \frac{1}{\sqrt{e(x,x)}} \mathbb{E}\left[\|\nabla_x f\| \;\middle|\; f(x) = 0 \right] |\mathrm{d}V_M|$$

On peut exprimer $\mathbb{E}\left[\|\nabla_x f\| \;\middle|\; f(x) = 0 \right]$ en fonction du noyau.

La preuve pour le volume

$$\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_f)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in M} \frac{1}{\sqrt{e(x,x)}} \mathbb{E}\left[\|\nabla_x f\| \;\middle|\; f(x) = 0 \right] |\mathrm{d}V_M|$$

On peut exprimer $\mathbb{E}\left[\|\nabla_x f\| \;\middle|\; f(x) = 0 \right]$ en fonction du noyau.

$(f(x), \nabla_x f)$ est un vecteur gaussien centré dans $\mathbb{R} \oplus T_x M$ de variance

$$\Lambda = \begin{pmatrix} e(x,x) & \partial_{y_1} e(x,x) & \cdots & \partial_{y_n} e(x,x) \\ \partial_{x_1} e(x,x) & \partial_{x_1}\partial_{y_1} e(x,x) & \cdots & \partial_{x_1}\partial_{y_n} e(x,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n} e(x,x) & \partial_{x_n}\partial_{y_1} e(x,x) & \cdots & \partial_{x_n}\partial_{y_n} e(x,x) \end{pmatrix}.$$

La loi conditionnelle de $\nabla_x f$ est une gaussienne centrée. Sa variance s'obtient à partir de Λ.

La preuve pour le volume

Pour $f \in V_\lambda$, on a des estimations pour le noyau et ses dérivées :

Théorème (Hörmander, 1968 – Bin, 2004)

- $e_\lambda(x,x) = C_n \lambda^{\frac{n}{2}} + O\left(\lambda^{\frac{n-1}{2}}\right)$,
- $\partial_{x_i} e_\lambda(x,x) = O\left(\lambda^{\frac{n}{2}}\right)$,
- $\partial_{x_i} \partial_{y_j} e_\lambda(x,x) = \delta_{ij} C'_n \lambda^{\frac{n+2}{2}} + O\left(\lambda^{\frac{n+1}{2}}\right)$.

La preuve pour le volume

Pour $f \in V_\lambda$, on a des estimations pour le noyau et ses dérivées :

Théorème (Hörmander, 1968 – Bin, 2004)

- $e_\lambda(x,x) = C_n \lambda^{\frac{n}{2}} + O\left(\lambda^{\frac{n-1}{2}}\right)$,
- $\partial_{x_i} e_\lambda(x,x) = O\left(\lambda^{\frac{n}{2}}\right)$,
- $\partial_{x_i}\partial_{y_j} e_\lambda(x,x) = \delta_{ij} C'_n \lambda^{\frac{n+2}{2}} + O\left(\lambda^{\frac{n+1}{2}}\right)$.

Remarque

On peut faire la même preuve pour d'autres modèles dès qu'on connait assez bien le noyau.

Avec une fonction-test

On peut faire la même chose avec une fonction-test $\phi(f, x)$.

Formule de Kac-Rice

$$\mathbb{E}\left[\int_{Z_f} \phi(f, x) \left|\mathrm{d}V_{Z_f}\right|\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_M \frac{\mathbb{E}\left[\|\nabla_x f\| \, \phi(f, x) \;\middle|\; f(x) = 0\right]}{\sqrt{e(x, x)}} \left|\mathrm{d}V_M\right| .$$

Avec une fonction-test

On peut faire la même chose avec une fonction-test $\phi(f,x)$.

Formule de Kac-Rice

$$\mathbb{E}\left[\int_{Z_f} \phi(f,x)\,|\mathrm{d}V_{Z_f}|\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_M \frac{\mathbb{E}\left[\|\nabla_x f\|\,\phi(f,x) \;\middle|\; f(x)=0\right]}{\sqrt{e(x,x)}}\,|\mathrm{d}V_M|\,.$$

Théorème (Zelditch, 2009)

Soit $f \sim \mathcal{N}(\mathrm{Id})$ dans V_λ, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\mathbb{E}\left[\int_{Z_f} \phi\,|\mathrm{d}V_{Z_f}|\right] \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{n+2}}\frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)} \int_M \phi\,|\mathrm{d}V_M|\,.$$

La formule de Gauss-Bonnet

Preuve pour χ dans le cas $n = 3$: Z_f est une surface.

Théorème (Formule de Gauss-Bonnet)

$$\chi(Z_f) = \frac{1}{2\pi} \int_{Z_f} \kappa_f(x) \left|\mathrm{d}V_{Z_f}\right|,$$

où κ_f est la courbure de Gauss de Z_f.

La formule de Gauss-Bonnet

Preuve pour χ dans le cas $n = 3$: Z_f est une surface.

Théorème (Formule de Gauss-Bonnet)

$$\chi(Z_f) = \frac{1}{2\pi} \int_{Z_f} \kappa_f(x) \left|\mathrm{d}V_{Z_f}\right|,$$

où κ_f est la courbure de Gauss de Z_f.

$$\mathbb{E}[\chi(Z_f)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_M \frac{\mathbb{E}\left[\|\nabla_x f\| \, \kappa_f(x) \;\middle|\; f(x) = 0\right]}{\sqrt{e(x,x)}} \left|\mathrm{d}V_M\right|$$

Problème

Exprimer $\kappa_f(x)$ en fonction de f et ses dérivées en x.

La preuve pour χ

Formule de Gauss

$$\kappa_f(x) = K(T_x Z_f) + \det\left(\mathrm{II}_f(x)\right),$$

où K est la courbure sectionnelle de M,
II_f est la seconde forme fondamentale de Z_f.

$$\mathrm{II}_f(x) = \frac{1}{\|\nabla_x f\|}(\nabla_x^2 f)_{/T_x Z_f}$$

$(f(x), \nabla_x f, \nabla_x^2 f)$ est un vecteur gaussien centré,
sa variance dépend seulement de e et ses dérivées en (x, x).

La preuve pour χ

Formule de Gauss

$$\kappa_f(x) = K(T_x Z_f) + \det\left(\mathrm{II}_f(x)\right),$$

où K est la courbure sectionnelle de M,
II_f est la seconde forme fondamentale de Z_f.

$$\mathrm{II}_f(x) = \frac{1}{\|\nabla_x f\|}(\nabla_x^2 f)_{/T_x Z_f}$$

$(f(x), \nabla_x f, \nabla_x^2 f)$ est un vecteur gaussien centré,
sa variance dépend seulement de e et ses dérivées en (x, x).

- $K(T_x Z_f)$ est borné, indépendamment de x, f et λ.
- $\det\left(\mathrm{II}_f(x)\right)$ contribue un terme d'ordre λ.

Asymptotiquement, on ne voit plus la courbure ambiante.

D'autres résultats de géométrie aléatoire

Autres résultats

- Résultats analogues dans un cadre algébrique réel : zéros de sections aléatoires d'un fibré ample sur une variété Kähler. (L., 2014)
- Asymptotique pour la moyenne du cycle conormal des Z_f, d'ordre $\lambda^{\frac{n}{2}}$. (Rivière – Dang, 2015)
- Théorème central limite pour le courant d'intégration sur Z_f, cadre algébrique complexe.
(Shiffman – Zelditch, 2010)
- Asymptotique de la variance pour la longueur de courbes nodales dans $\mathbb{S}^2$, d'ordre $\ln(\lambda)$.
(Wigman, 2010)

Autres résultats

Théorème (Nazarov – Sodin, 2015)

Sur (M, g) *riemannienne de dimension* n*, il existe* $C > 0$ *(non explicite) telle que, pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{b_0(Z_f)}{\lambda^{\frac{n}{2}}} - C\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0.$$

Théorème (Gayet – Welschinger, 2015)

Soient (M, g) *riemannienne de dimension* n *et* Σ *une hypersurface fermée de* $\mathbb{R}^n$*. Alors*

$$\liminf_{\lambda \to +\infty} \mathbb{E}\left[\frac{N_\Sigma(f)}{\lambda^{\frac{n}{2}}}\right] \geqslant C_\Sigma,$$

où $N_\Sigma(f)$ *est le nombre de composantes de* Z_f *difféomorphes à* Σ *et* $C_\Sigma > 0$ *est explicite.*

The end

Merci de votre attention.